09/11/2017

Μάθημα 5ο

Πόρισμα: Αν A συμμετρικός και Θ.Ο. τότε $\det A > 0$
ο A επιδέχεται παραγοντοποίηση Cholesky:
$A = LL^T$

Τότε: $\det(A) = \det(LL^T) = \det(L)\cdot\det(L^T) =$
$= (\det(L))^2 = (l_{11}\, l_{22} \dots l_{nn})^2 > 0$

Πόρισμα: Το μέγιστο απόλυτα στοιχείο ενός συμμ. και Θ.Ο. πίνακα, βρίσκεται στη διαγώνιο.

Έστω A συμμετρικός και Θ.Ο. Διαγράφουμε τις $n-2$ γραμμές και στήλες εκτός από την i και j και προκύπτει ο πίνακας:

$$\begin{bmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{bmatrix}$$

A: συμμετρικός $\Rightarrow a_{ji} = a_{ij}$

Αυτός είναι ο συμμετρικός και Θ.Ο. επομένως έχει ορίζουσα θετική: $a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \max\{a_{ii}, a_{jj}\} > |a_{ij}| \Rightarrow$
το μέγιστο απόλυτα στοιχείο βρίσκεται στη διαγώνιο.
Αυτό ισχύει για κάθε ζεύγος i,j με $i \neq j$
(Δεν ισχύει αντίστροφα)

Θεώρημα (Αντίστροφο Cholesky)

Αν ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ επιδέχεται παραγοντοποίηση Cholesky θα είναι συμμετρικός και Θ.Ο.

Έστω A επιδέχεται παραγοντοποίηση Cholesky:

$A = LL^T$

$A^T = (LL^T)^T = L^T L = A$ συμμετρικός

Έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ τότε: $(x, Ax) = (x, LL^T x) =$

$= (L^T x, L^T x) = \|L^T x\|_2 \geq 0$

Αν $\|L^T x\|_2 = 0 \iff L^T x = 0 \iff \det(L^T) = 0$

άτοπο, διότι $\det(L^T) = \underbrace{L_{11}}_{\neq 0} \underbrace{L_{22}}_{\neq 0} \dots \underbrace{L_{nn}}_{\neq 0} > 0$

Αφού επιδέχεται Cholesky

Άρα: $\|L^T x\| > 0 \iff (x, Ax) > 0$

Θεώρημα: Ένας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι συμμετρικός και Θ.Ο. αν-ν όλες οι κύριες υποορίζουσες της άνω αριστερής γωνίας είναι θετικές (ή κάτω δεξιάς γωνίας)

Έστω A συμμ. και Θ.Ο. Τότε επιδέχεται παραγοντοποίηση Cholesky. Άρα:

$A = LL^T \iff$

τριγωνικός

επειδή Α συμμ.

$$\begin{bmatrix} A_k & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_k & 0 \\ L_{n-k,k} & \tilde{L}_{n-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_k^T & L_{n-k,k}^T \\ 0 & \tilde{L}_{n-k}^T \end{bmatrix}$$

$A_k = L_k L_k^T$. Ο A_k είναι συμμ. και Θ.Ο. Επομένως $L_k L_k^T$ επιδέχεται παραγοντοποίηση Cholesky $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \det(A_k) = \det(L_k L_k^T) = \det(L_k)^2 =$$
$$= l_{11}^2\, l_{22}^2\, l_{33}^2 \dots l_{kk}^2 > 0$$

Αντίστροφα:
Έστω ότι όλες οι υποορίζουσες της άνω αριστερής γωνίας $\det(A_k)$ είναι θετικές. Τότε για $k=1$: $a_{11}>0$
Θεωρούμε την LU παραγοντοποίηση του $A=LU$

$$\begin{bmatrix} A_k & B \\ B^T & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_k & 0 \\ L_{n-k,k} & \tilde{L}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_k & U_{k,k-1} \\ 0 & \tilde{U}_{n-k} \end{bmatrix}$$

$$\det(A_k) = \det(L_k U_k) = \underbrace{\det(L_k)}_{\substack{= 1 \\ \text{(γινόμενο μονάδων)}}} \cdot \det(U_k) =$$
$$= U_{11} U_{22} \dots U_{kk} > 0$$

Για $k=1$ έχουμε : $U_{11} = a_{11} > 0$
Έστω $U_{ii} > 0$ για όλα τα $i = 1(1)k$
$A_{k+1} = L_{k+1} U_{k+1}$:
$$\det(A_{k+1}) = \det(U_{k+1}) = \overbrace{U_{11} U_{22} \dots U_{kk}}^{>0} U_{k+1,k+1} > 0$$
(Αφού $\det(L_{k+1}) = 1$)
$\Rightarrow U_{k+1,k+1} > 0 \Rightarrow U_{ii} > 0$, $i = 1(1)n$

$A = LU$, με $U_{ii} > 0$, $i = 1(1)n$
Γράφουμε τον $U = DU'$ όπου $d_{ii} = U_{ii} > 0$
παραγοντοποίηση Crout $\leftarrow$ Τότε: $A = LDU' = (LD^{1/2})(D^{1/2}U')$
Επειδή A: συμμετρικός προκύπτει ότι $U' = L^T$:
$A = (LD^{1/2})(D^{1/2}L^T) = L' L'^T$: παραγοντ. Cholesky
$\Rightarrow$ A θετικά ορισμένος

> Έστω $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ συμμ. και Θ.Ο.

αφού ανάστρ. του L

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & & \\ l_{21} & l_{22} & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ & l_{22} & l_{32} \\ & & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$(A = L \cdot L^T)$$

$a_{11} > 0$ αφού A Θ.Ο.

$$l_{11}^2 = a_{11} \iff l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$l_{21} \cdot l_{11} = a_{21} \iff l_{21} = a_{21} / l_{11}$$

$$l_{21}^2 + l_{22}^2 = a_{22} \iff l_{22} = \left(a_{22} - l_{21}^2\right)^{1/2}$$

$$l_{31} l_{11} = a_{31} \iff l_{31} = a_{31} / l_{11}$$

$$l_{31} l_{21} + l_{32} \cdot l_{22} = a_{32} \iff l_{32} = \left(a_{32} - l_{31} \cdot l_{21}\right) / l_{22}$$

$$l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{32}^2 = a_{33} \iff l_{33} = \left(a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2\right)^{1/2}$$

Αλγόριθμος Παραγοντοποίησης Cholesky

Δεδομένα: A συμμ. και Θ.Ο.

Για $i = 1(1)n$

Για $j = 1(1)i-1$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right) \Big/ l_{jj}$$

Τέλος 'Για'

$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\right)^{1/2}$$

Τέλος 'Για'

$$l_{i1} l_{j1} + l_{i2} l_{j2} + \dots + l_{ij} l_{ji} = a_{ij} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}\right) \Big/ l_{jj}$$

Εφαρμογή σε σύστημα της παραγοντ. Cholesky

Να λυθεί το γραμμικό σύστημα $Ax = b$ με:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

με τη μέθοδο παραγοντοποίησης Cholesky.

$$\det(A_{11}) = 1 > 0$$
$$\det(A_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 > 0$$
$$\det(A) = 10 + 0 + 0 - 0 - 4 - 2 = 4 > 0$$

Είναι συμμετρικός και Θ.Ο.
Άρα παραγοντοποίηση Cholesky.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{1}1 & & \\ {}^{2}1 & {}^{3}2 & \\ {}^{4}0 & {}^{5}-1 & {}^{6}1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 2 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$5 - 1 \cdot 1 = 4$ → παίρνω με τετραγ. ρίζα ⇒ άρα 2

$$Ax = b \iff L\underbrace{L^T x}_{y} = b \iff \begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ 1 & 2 & \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

προς τα εμπρός αντικατάσταση

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 2 & -1 \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

προς τα πίσω
αντικαταστάσεις

Άσκηση 6

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & & \\ 2 & 2 & \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{L^T} =$$

κανόνας του Σιλβέστερ

$\det(A_{11}) = 9 > 0$
$\det(A_{22}) = 8 \cdot 9 - 6 \cdot 6 = 36 > 0$
$\det(A) = \underbrace{216}_{9 \cdot 8 \cdot 3} + \underbrace{72}_{4 \cdot 6 \cdot 3} + \underbrace{72} - \underbrace{72}_{3 \cdot 3 \cdot 8} - \underbrace{144}_{4 \cdot 4 \cdot 9} - \underbrace{108}_{6 \cdot 6 \cdot 3} = 36 > 0$

LU παραγοντοποίηση:

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2/3 & 1 & \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{L'} \underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} 3 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}^{\text{πίνακας κοινός παραγόντων}}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{L^T} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2/3 & 1 & \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}}_{L'} \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \\ & 4 & 2 \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

Η Cholesky μεταφέρει λιγότερα σφάλματα από την αναλ. Gauss (LU)

$$AX = I \iff L\underbrace{L^T X}_{Y} = I \iff \begin{cases} LY = I \\ L^T X = Y \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & & & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$Y^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y = L^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 1/3 & 0 & 0 \\ & 2 & 1 & -1/3 & 1/2 & 0 \\ & & 1 & 0 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

$$X^T = \begin{bmatrix} 2/9 & -1/6 & 0 \\ -1/6 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} = X = A^{-1}$$

Άσκηση 1

ν.α.ο. τα διαγ. στοιχεία ενός συμμ. και Θ.Ο. πίνακα είναι θετικά (από τον ορισμό του Θ.Ο.)

<u>Λύση</u>

$a_{ii} > 0$

A Θ.Ο. αν-ν $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ $(x, Ax) > 0$

Παίρνουμε:

$$x = e^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-θέση.} \neq 0$$

$$0 < (x, Ax) = (e^i, Ae^i) = (e^i, a_i) = a_{ii}$$

Όλες οι ιδιοτιμές ενός συμμ. και Θ.Ο. πίνακα είναι θετικές.

Έστω λ ιδιοτιμή του A με ιδιοδιάνυσμα $x \neq 0$.

Τότε:

$$0 < (x, Ax) = (x, \lambda x) = \lambda(x, x) = \lambda \|x\|_2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda > 0$$